

Скрипты рисунков на MetaPost

Язык программирования: LaTeX

Сергей Митрофанов

E-mail: infostar@mail.ru

<http://www.Best-Listing.ru/>

В сборнике 37 задач

Детская компьютерная школа

юных программистов

"Северная Звезда"

Сургут

2 августа 2020 года

Содержание

- | | | |
|---|---|----|
| 1 | Рисунки к задачам типа 16 (планиметрия) ЕГЭ-2020 по математике.
MetaPost [mp_36] | 3 |
| 2 | Макросы на MetaPost для рисунков по геометрии [mac_1] | 39 |

1 Рисунки к задачам типа 16 (планиметрия) ЕГЭ-2020 по математике. MetaPost [mp_36]

mp_1. Задача 16, вариант 1

Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.
Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P .

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 6, $\angle BAC = 75^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$.

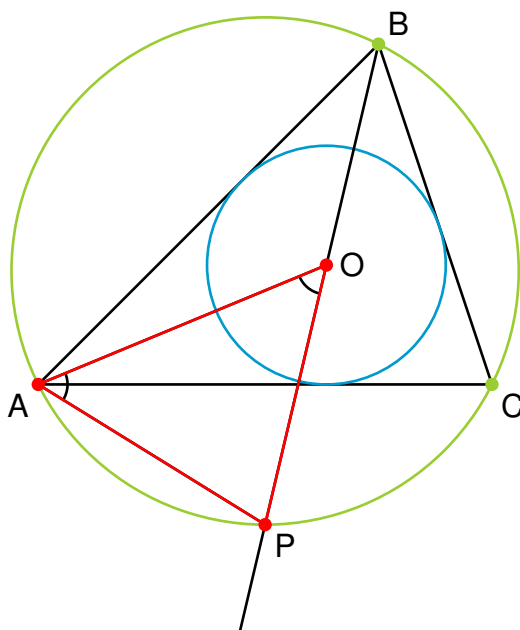


Рис. 1: Задача 16, вариант 1, ЕГЭ-2020, математика

mp_2. Задача 16, вариант 2, ЕГЭ-2020, математика

Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.
Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке E .

а) Докажите, что $\angle EOC = \angle ECO$.

б) Найдите площадь треугольника ACE , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$.

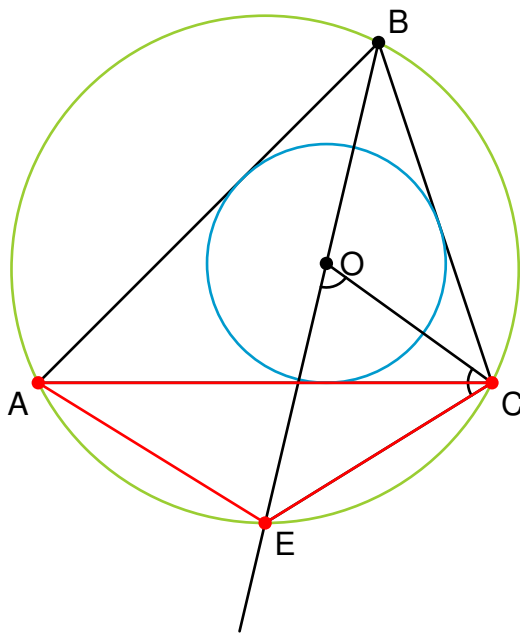


Рис. 2: Задача 16, вариант 2, ЕГЭ-2020, математика

mp_3. Задача 16, вариант 3, ЕГЭ-2020, математика

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M , а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N .

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 3$, а $\cos \angle BAD = 0,4$.

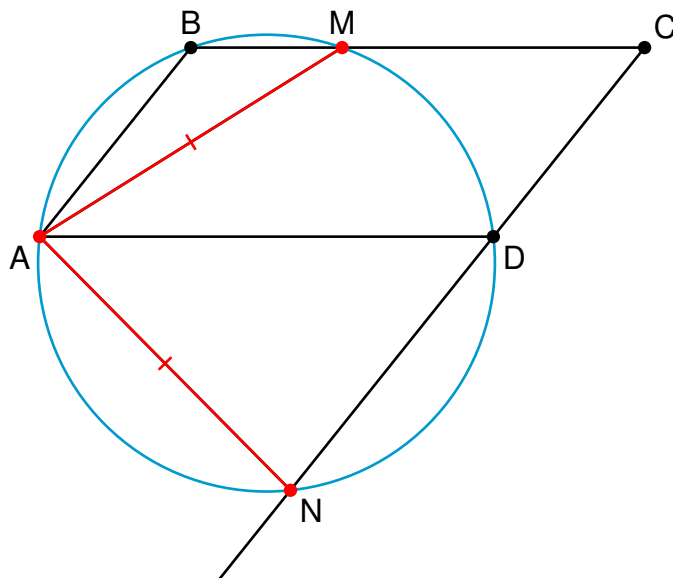


Рис. 3: Задача 16, вариант 3, ЕГЭ-2020, математика

mp_4. Задача 16, вариант 4, ЕГЭ-2020, математика

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M , а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N .

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 2 : 3$, а $\cos \angle BAD = 0,7$.

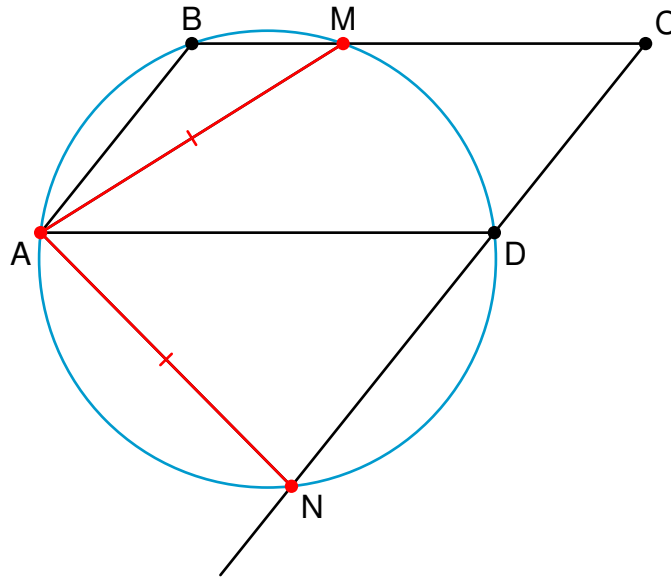


Рис. 4. Задача 16, вариант 4, ЕГЭ-2020, математика

mp_5. Задача 16, вариант 5, ЕГЭ-2020, математика

В треугольнике ABC известно, что $AC = 10$ и $AB = BC = 14$.

- Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC , пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC .
- Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC .

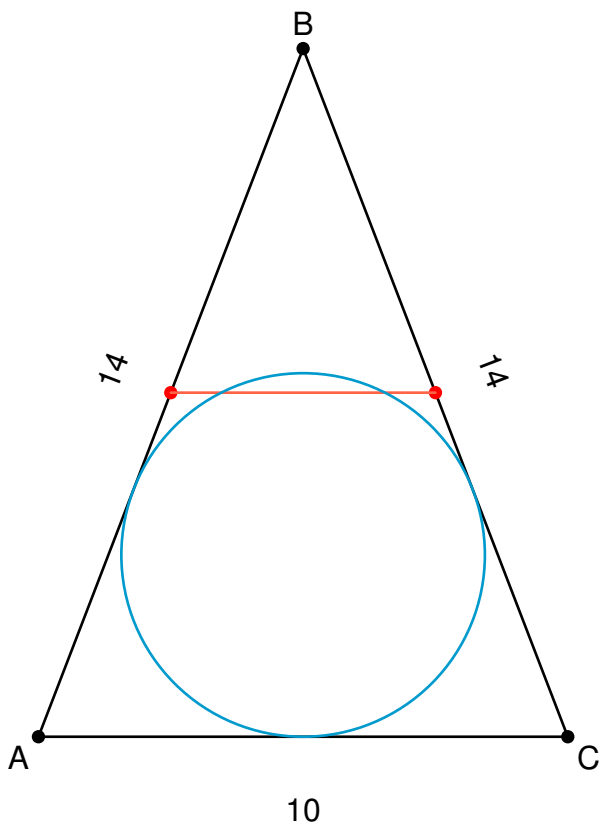


Рис. 5. Задача 16, вариант 5, ЕГЭ-2020, математика

mp_6. Задача 16, вариант 6, ЕГЭ-2020, математика

В треугольнике ABC известно, что $AC = 26$ и $AB = BC = 38$.

- а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC , пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC .
- б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC .

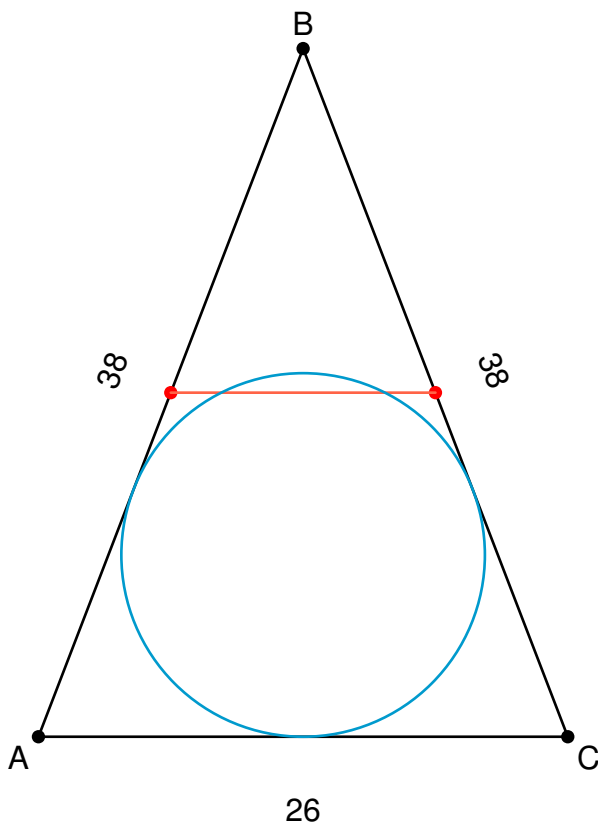
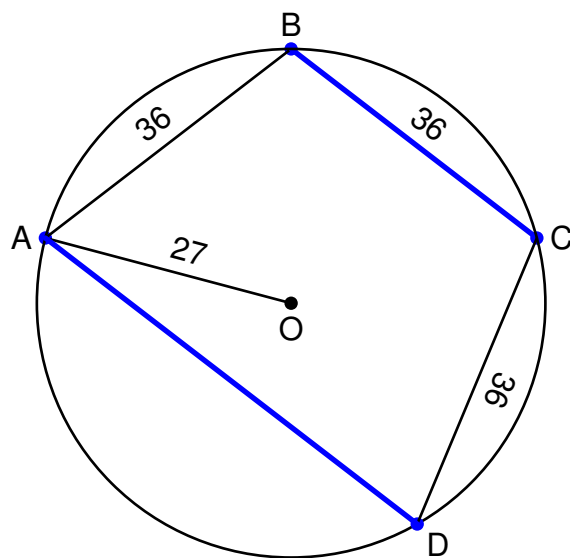


Рис. 6. Задача 16, вариант 6, ЕГЭ-2020, математика

mp_7. Задача 16, вариант 7, ЕГЭ-2020, математика

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 27$. Известно, что $AB = BC = CD = 36$.

- Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- Найдите AD .



mp_8. Задача 16, вариант 8, ЕГЭ-2020, математика

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 12$. Известно, что $AB = BC = CD = 18$.

- а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
- б) Найдите AD .

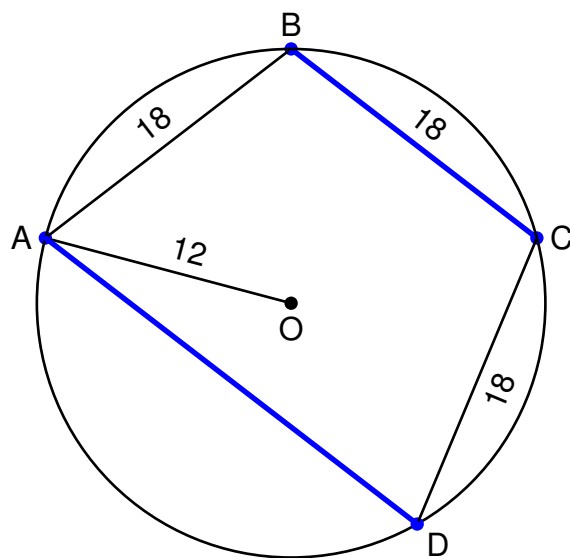


Рис. 8. Задача 16, вариант 8, ЕГЭ-2020, математика

mp_9. Задача 16, вариант 9, ЕГЭ-2020, математика

В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке F . Отрезок BD — диаметр этой окружности.

- а) Докажите, что $AD = CF$.
- б) Найдите DF , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 12, $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$.

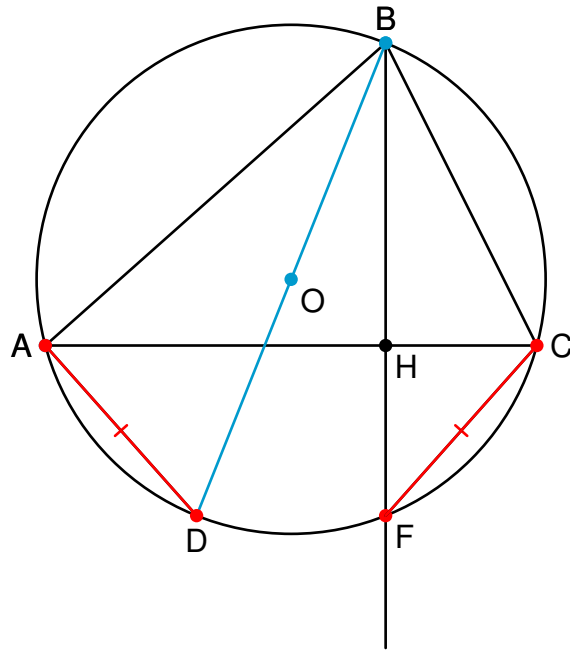


Рис. 9. Задача 16, вариант 9, ЕГЭ-2020, математика

mp_10. Задача 16, вариант 10, ЕГЭ-2020, математика

В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K . Отрезок BN — диаметр этой окружности.

- а) Докажите, что AC и KN параллельны.
- б) Найдите расстояние от точки N до прямой AC , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{6}$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 105^\circ$.

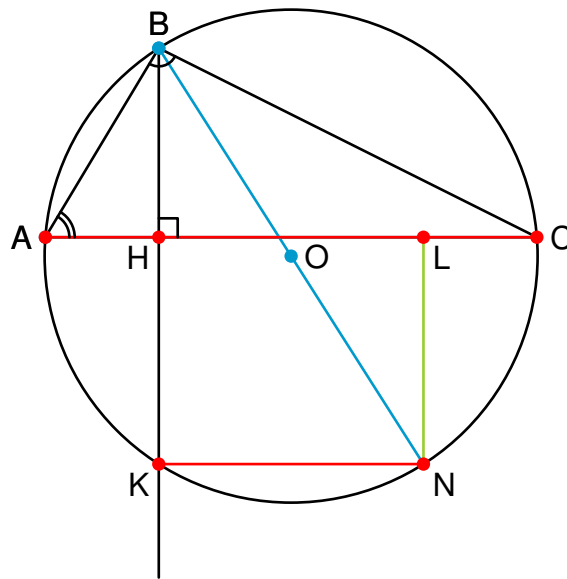


Рис. 10. Задача 16, вариант 10, ЕГЭ-2020, математика

mp_11. Задача 16, вариант 11, ЕГЭ-2020, математика

На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM = BN = \frac{1}{2}KN$. Точка P — середина отрезка KN .

- а) Докажите, что четырёхугольник $BSPM$ — равнобедренная трапеция.
- б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BM = 1$ и $\angle BCM = 15^\circ$.

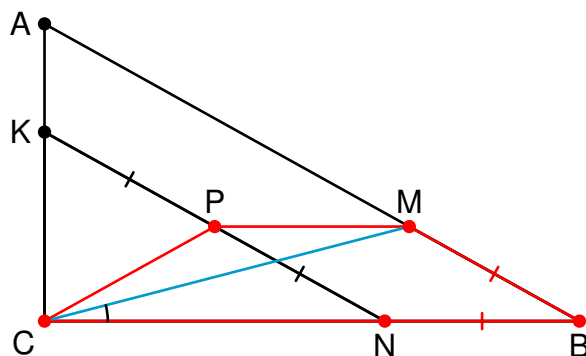


Рис. 11. Задача 16, вариант 11, ЕГЭ-2020, математика

mp_12. Задача 16, вариант 12, ЕГЭ-2020, математика

На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM = BN = \frac{1}{2} KN$. Точка P — середина отрезка KN .

- Докажите, что четырёхугольник $BSPM$ — равнобедренная трапеция.
- Найдите площадь треугольника ABC , если $BM = 2$ и $\angle BCM = 30^\circ$.

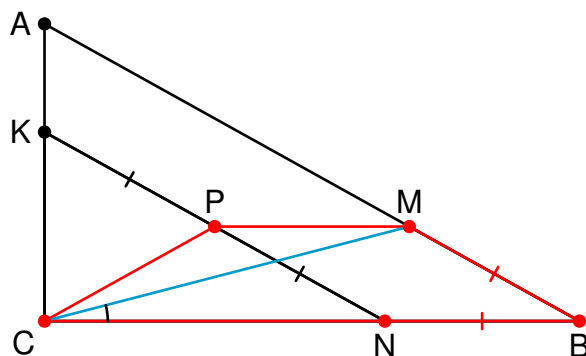


Рис. 12. Задача 16, вариант 12, ЕГЭ-2020, математика

mp_13. Задача 16, вариант 13, ЕГЭ-2020, математика

Окружность с центром в точке O пересекает каждую из сторон трапеции $ABCD$ в двух точках. Четыре получившиеся хорды окружности равны.

- а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.
- б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 19$, $KL = 12$, $LB = 3$.

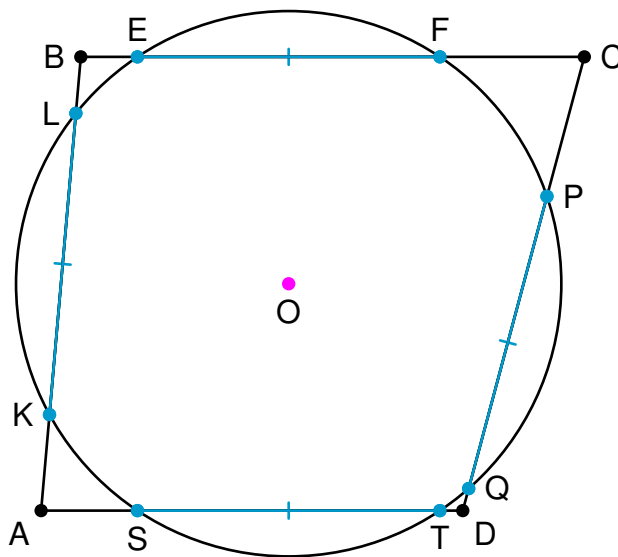


Рис. 13. Задача 16, вариант 13, ЕГЭ-2020, математика

mp_14. Задача 16, вариант 14, ЕГЭ-2020, математика

Окружность с центром в точке O пересекает каждую из сторон трапеции $ABCD$ в двух точках. Четыре получившиеся хорды окружности равны.

- Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.
- Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 13$, $KL = 6$, $LB = 1$.

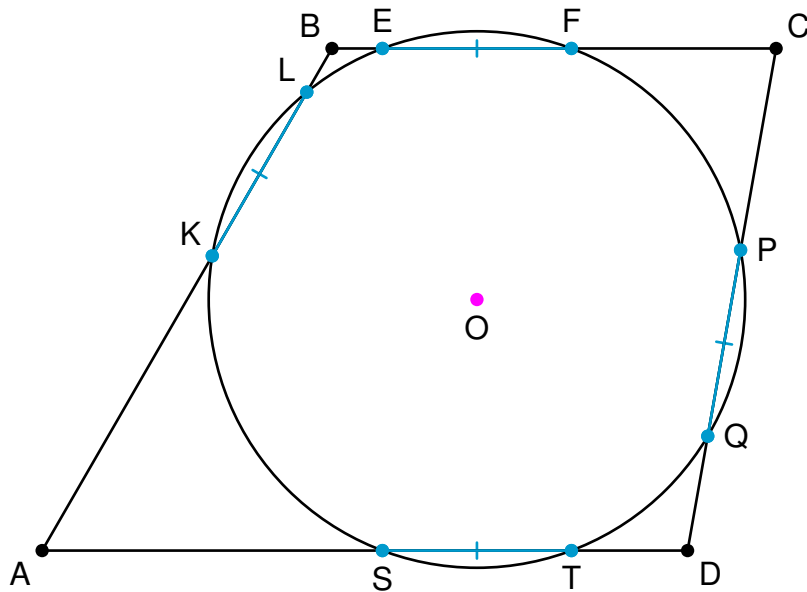


Рис. 14. Задача 16, вариант 14, ЕГЭ-2020, математика

mp_15. Задача 16, вариант 15, ЕГЭ-2020, математика

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

- а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.
- б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 5$ и $AH = 4$.

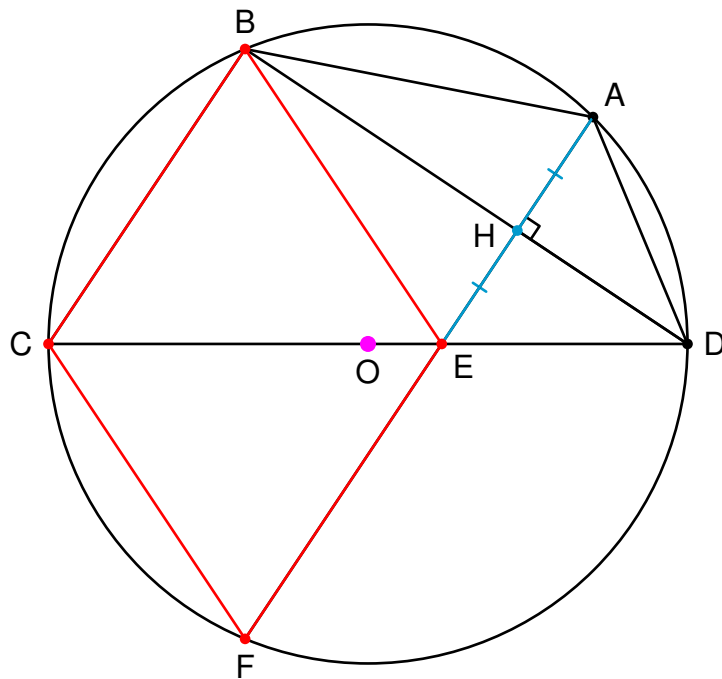


Рис. 15. Задача 16, вариант 15, ЕГЭ-2020, математика

mp_16. Задача 16, вариант 16, ЕГЭ-2020, математика

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E , а окружность — в точке F , причём H — середина AE .

- а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.
- б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 6$ и $AH = 2\sqrt{5}$.

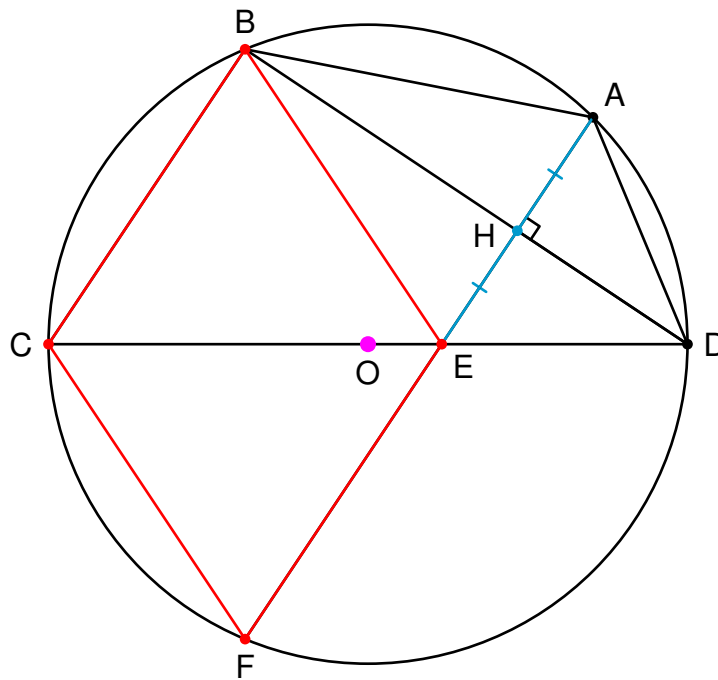


Рис. 16. Задача 16, вариант 16, ЕГЭ-2020, математика

mp_17. Задача 16, вариант 17, ЕГЭ-2020, математика

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD , а также боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 9$, $BC = 8$, $CD = 4$, $AD = 15$.

- Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
- Найдите O_1O_2 .

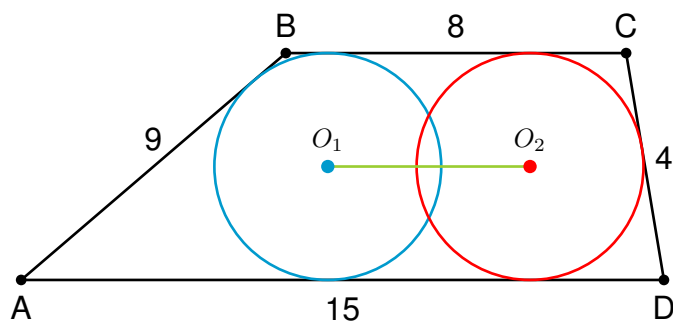


Рис. 17. Задача 16, вариант 17, ЕГЭ-2020, математика

mp_18. Задача 16, вариант 17, ЕГЭ-2020, математика

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD , а также боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 15$, $BC = 32$, $CD = 14$, $AD = 11$.

- Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
- Найдите O_1O_2 .

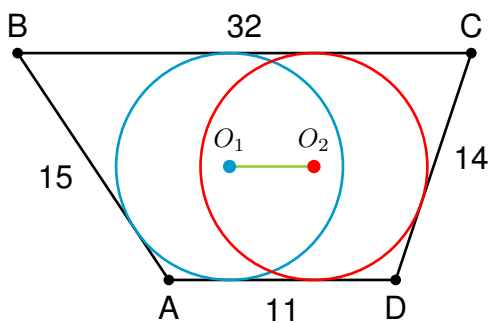


Рис. 18. Задача 16, вариант 18, ЕГЭ-2020, математика

mp_19. Задача 16, вариант 19, ЕГЭ-2020, математика

На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM = BN = \frac{1}{2} KN$. Точка P — середина отрезка KN .

- а) Докажите, что четырёхугольник $BSPM$ — равнобедренная трапеция.
- б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BM = 2$ и $\angle PMC = 15^\circ$.

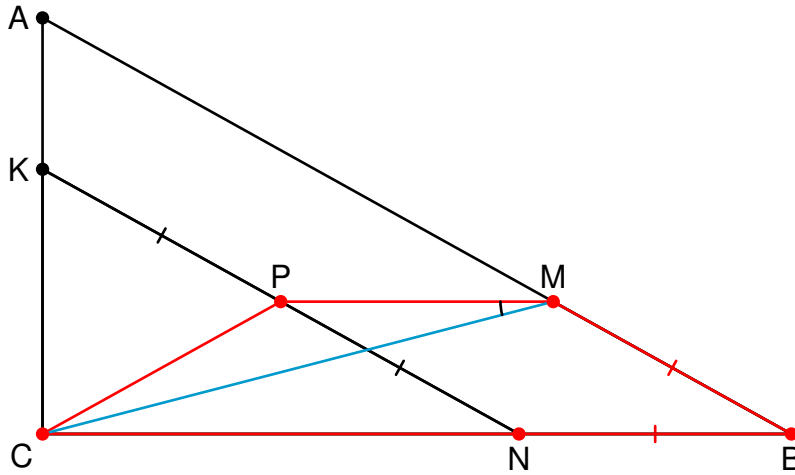


Рис. 19. Задача 16, вариант 19, ЕГЭ-2020, математика

mp_20. Задача 16, вариант 20, ЕГЭ-2020, математика

Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На катете AC взята точка M . Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N .

- а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.
- б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

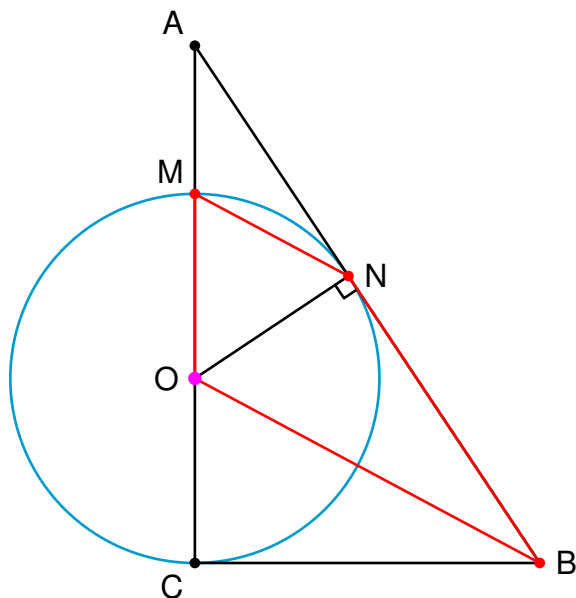


Рис. 20. Задача 16, вариант 20, ЕГЭ-2020, математика

mp_21. Задача 16, вариант 21, ЕГЭ-2020, математика

В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC . Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

- Докажите, что $BM = CM$.
- Найдите угол ABC , если угол BCD равен 64° , а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD .

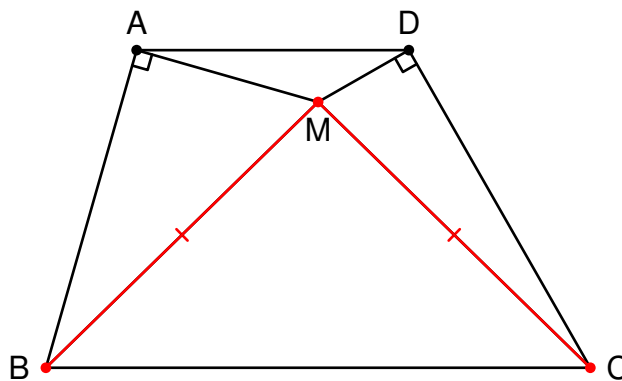


Рис. 21. Задача 16, вариант 21, ЕГЭ-2020, математика

mp_22. Задача 16, вариант 22, ЕГЭ-2020, математика

В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC . Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

- а) Докажите, что $BM = CM$.
- б) Найдите угол ABC , если угол BCD равен 57° , а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD .

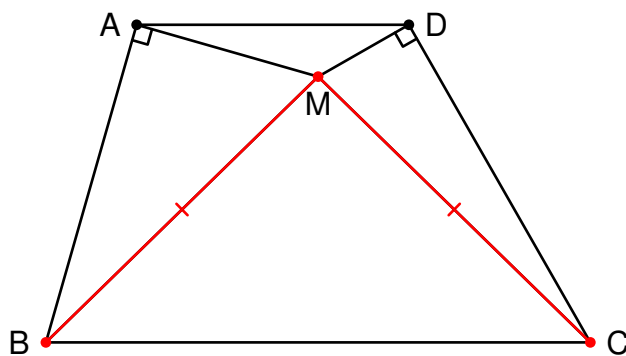


Рис. 22. Задача 16, вариант 22, ЕГЭ-2020, математика

mp_23. Задача 16, вариант 23, ЕГЭ-2020, математика

В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N, P .

- а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.
- б) Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $BC = 6$.

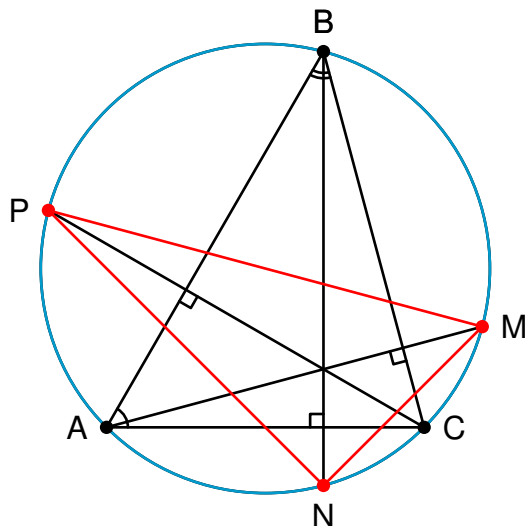


Рис. 23. Задача 16, вариант 23, ЕГЭ-2020, математика

mp_24. Задача 16, вариант 24, ЕГЭ-2020, математика

В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N, P .

- а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный.
- б) Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что $BC = 10$.

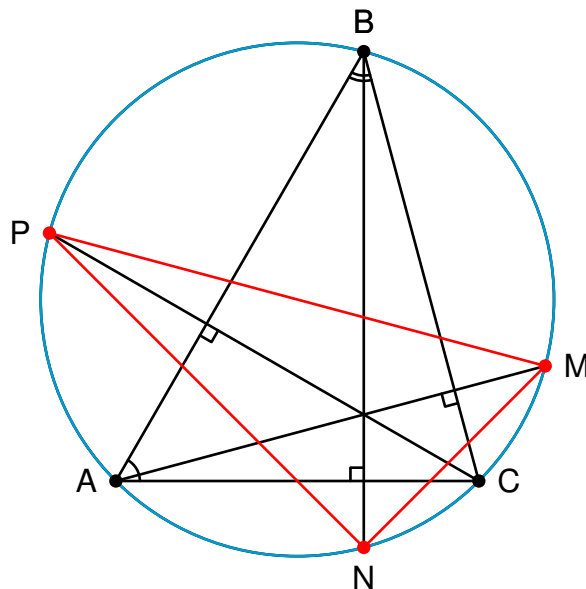


Рис. 24. Задача 16, вариант 24, ЕГЭ-2020, математика

mp_25. Задача 16, вариант 25, ЕГЭ-2020, математика

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

- а) Докажите, что C_1Q – биссектриса угла AC_1B_1 .
- б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AC_1B_1 , если известно, что $BC = 15, AB = 13, AC = 14$.

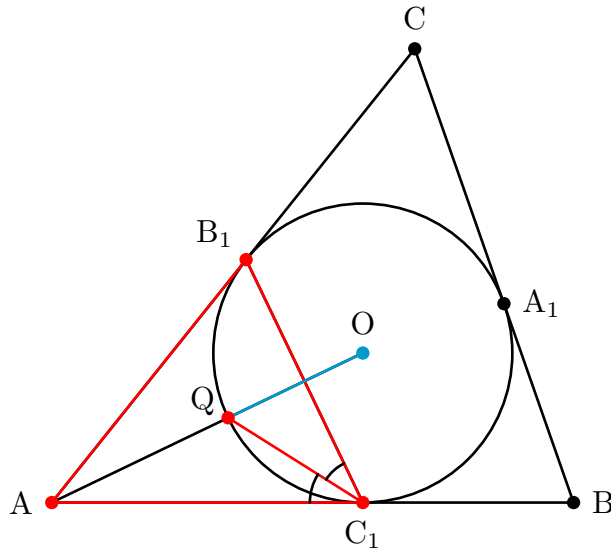


Рис. 25. Задача 16, вариант 25, ЕГЭ-2020, математика

mp_26. Задача 16, вариант 26, ЕГЭ-2020, математика

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке Q , лежащей внутри треугольника AB_1C_1 .

- а) Докажите, что C_1Q – биссектриса угла AC_1B_1 .
- б) Найдите расстояние от точки O до центра окружности, вписанной в треугольник AB_1C_1 , если известно, что $BC = 7, AB = 15, AC = 20$.

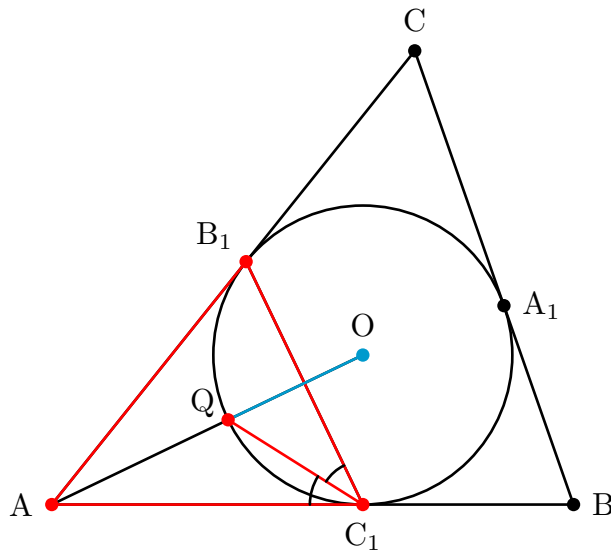


Рис. 26. Задача 16, вариант 26, ЕГЭ-2020, математика

mp_27. Задача 16, вариант 27, ЕГЭ-2020, математика

В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD , вторая - боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

- а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P . Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.
- б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

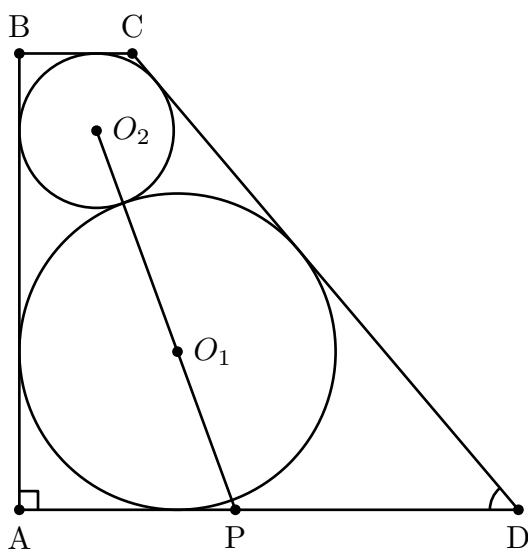


Рис. 27. Задача 16, вариант 27, ЕГЭ-2020, математика

mp_28. Задача 16, вариант 28, ЕГЭ-2020, математика

Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

- а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.
- б) Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 5$, а $BC = 5\sqrt{2}$.

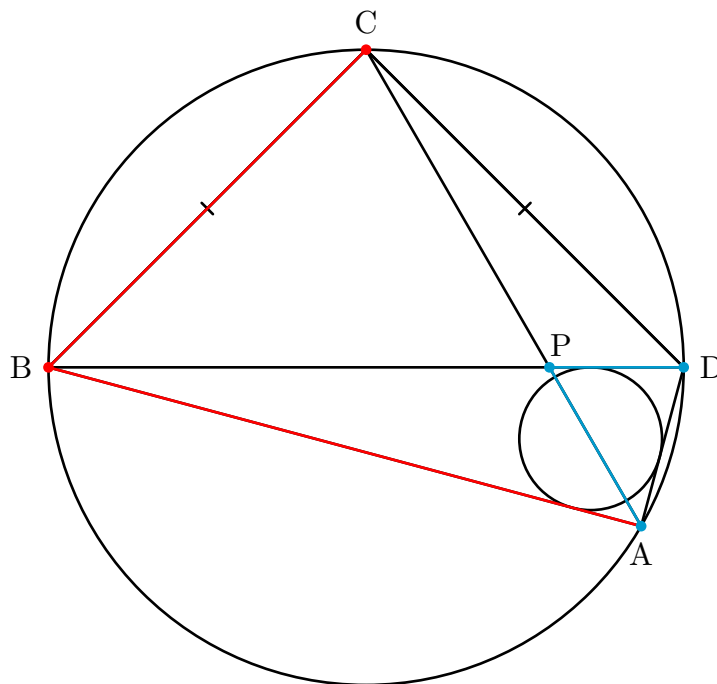


Рис. 28. Задача 16, вариант 28, ЕГЭ-2020, математика

mp_29. Задача 16, вариант 29, ЕГЭ-2020, математика

Точка B лежит на отрезке AC . Прямая, проходящая через точку A , касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K . Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника DBC , если $AK = 3$ и $MK = 12$.

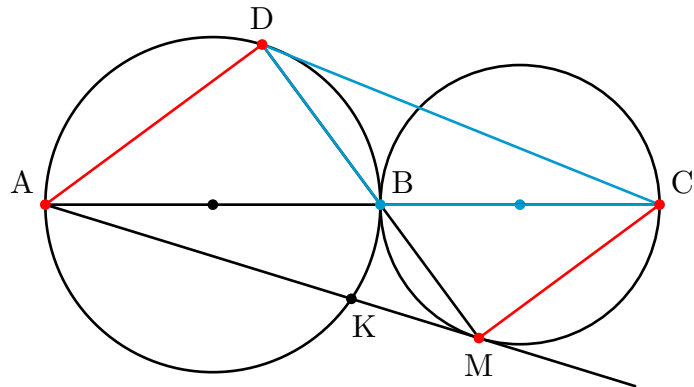


Рис. 29. Задача 16, вариант 29, ЕГЭ-2020, математика

mp_30. Задача 16, вариант 30, ЕГЭ-2020, математика

Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

- а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.
- б) Найдите MN , если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

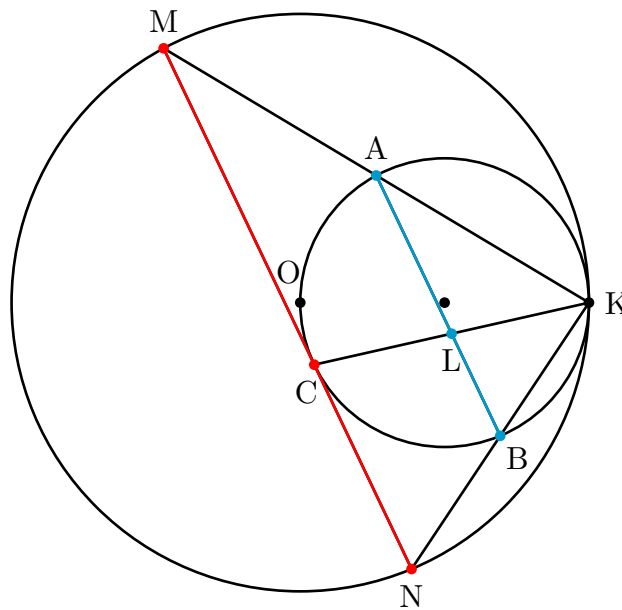


Рис. 30. Задача 16, вариант 30, ЕГЭ-2020, математика

mp_31. Задача 16, вариант 31, ЕГЭ-2020, математика

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
- б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите AL , если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

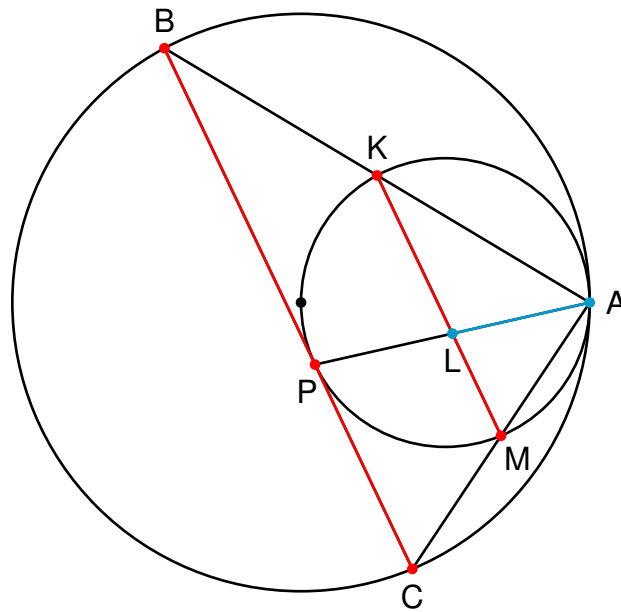


Рис. 31. Задача 16, вариант 31, ЕГЭ-2020, математика

mp_32. Задача 16, вариант 32, ЕГЭ-2020, математика

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

- а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.
- б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

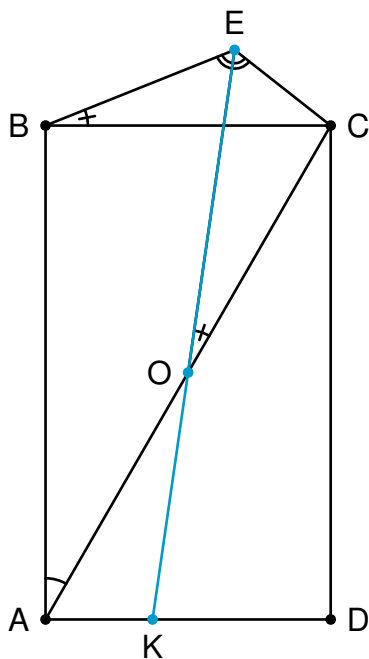


Рис. 32. Задача 16, вариант 32, ЕГЭ-2020, математика

mp_33. Задача 16, вариант 33, ЕГЭ-2020, математика

Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

- а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.
- б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

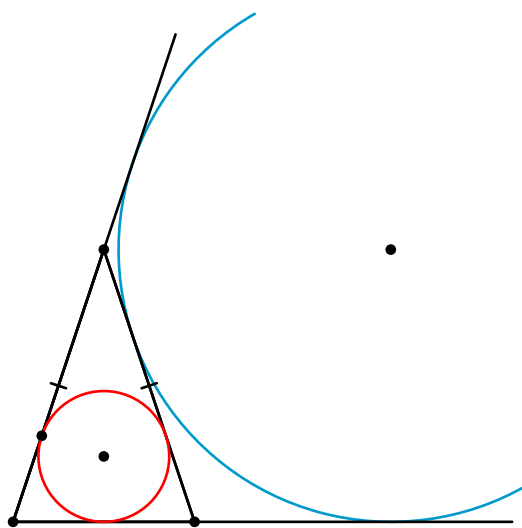


Рис. 33. Задача 16, вариант 33, ЕГЭ-2020, математика

mp_34. Задача 16, вариант 34, ЕГЭ-2020, математика

Прямая, параллельная основаниям BC и AD трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Прямая MN пересекает стороны OA и OD треугольника AOD в точках K и L соответственно.

- Докажите, что $MK = NL$.
- Найдите MN , если известно, что $BC = 3$, $AD = 8$ и $MK : KL = 1 : 3$.

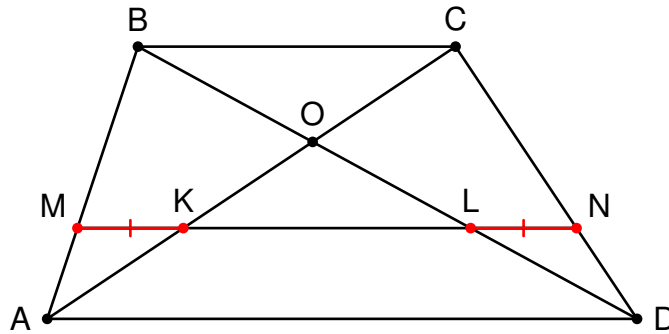


Рис. 34. Задача 16, вариант 34, ЕГЭ-2020, математика

mp_35. Задача 16, вариант 35, ЕГЭ-2020, математика

Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

- Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
- Известно, что радиус этих кружностей равен 4, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 14. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

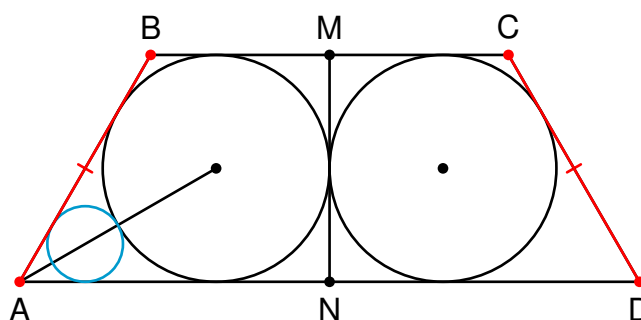


Рис. 35. Задача 16, вариант 35, ЕГЭ-2020, математика

mp_36. Задача 16, вариант 36, ЕГЭ-2020, математика

На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

- а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.
- б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{5}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

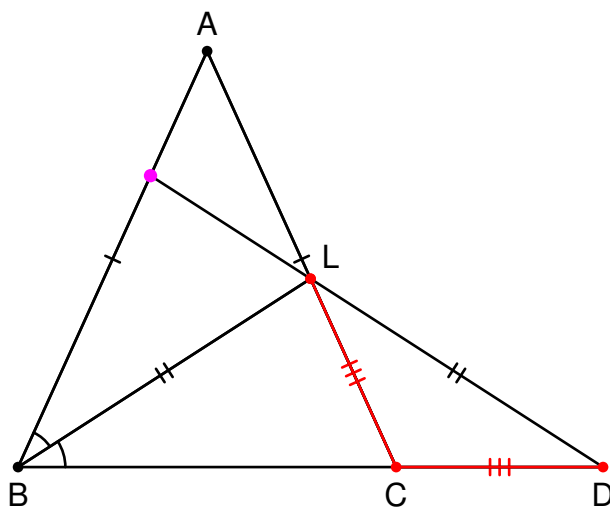


Рис. 36. Задача 16, вариант 36, ЕГЭ-2020, математика

2 Макросы на MetaPost для рисунков по геометрии [мас_1]

мас_1. Библиотека макросов version 1

macros_msp.mp

для рисунков по геометрии (планиметрии).